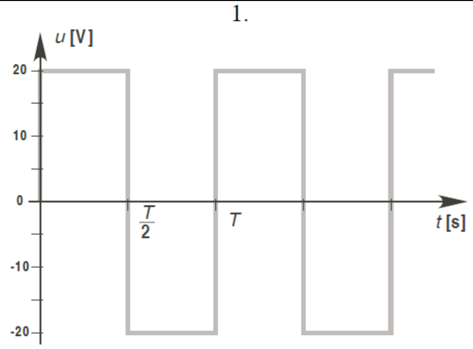
Sciences et technologies de l'électricité – Série 5

Exercice 1 :

Rappel : Valeur moyenne d'une fonction x(t): $\overline{X} = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt$

Valeur efficace d'une fonction x(t) : $X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt}$

1.

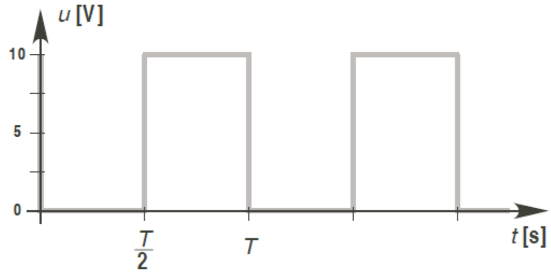


$$\overline{U} = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} 20dt + \int_{T/2}^{T} -20dt\right] = 0 \text{ V}$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} (20)^2\, dt + \int_{T/2}^{T} (-20)^2\, dt\right]} = 20 \text{ V}$$

$$\hat{U} = 20 \text{ V}$$

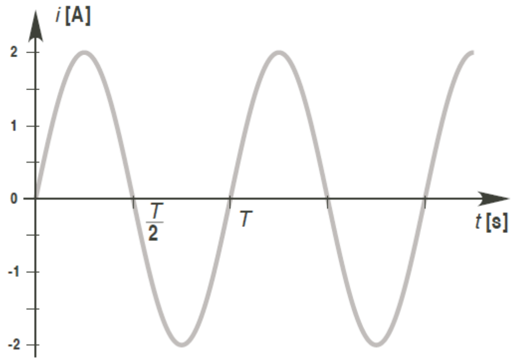
2.



$$\overline{U} = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} 0dt + \int_{T/2}^{T} 10dt\right] = 5 \text{ V}$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} (0)^2\, dt + \int_{T/2}^{T} (10)^2\, dt\right]} = \frac{10}{\sqrt{2}} \text{ V}$$

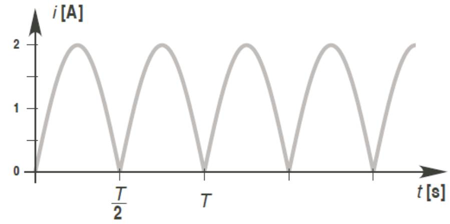
$$\hat{U} = 10 \text{ V}$$



$$\overline{I} = \frac{1}{T}\int_0^{T} 2\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt = -\frac{1}{2\pi}2\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\Bigg|_0^T = 0 \text{ A}$$

$$I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ A}$$

$$\hat{I} = 2 \text{ A}$$

 	$\bar{I} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} 2\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt = -\frac{1}{\pi}2\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\Big\|_0^{T/2} = \frac{4}{\pi}\ \text{A}$ $I = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} 4\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt} = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} 4\left(\frac{1-\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)}{2}\right)dt}$ $I = 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\sqrt{\left[\frac{1}{2}t - \frac{T}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right]_0^{T/2}} = 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\cdot\frac{\sqrt{T}}{2} = \sqrt{2}\ \text{A}$ $\hat{I} = 2\ \text{A}$

Exercice 2 :

Supposez 3 dipôles inconnus aux bornes desquels les couples tension / courant suivants sont mesurés:

- $\begin{cases} u_1(t) = 1.2\cos(10^3\pi t)\ V \\ i_1(t) = 0.3\cos\left(10^3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) A \end{cases}$

- $\begin{cases} u_2(t) = 23\cos(50\pi t + 1.4)\ V \\ i_2(t) = 5\sin(50\pi t - 0.6)\ \ A \end{cases}$

- $\begin{cases} u_3(t) = 310\cos(100\pi t + 2.5)\ V \\ i_3(t) = 14.15\cos(100\pi t + 2.5)\ A \end{cases}$

a) Calculer la fréquence *f* de chacun des signaux précédents

$$\omega_1 = 10^3\pi = 2\pi f_1 \Rightarrow f_1 = 500\ \text{Hz}$$

$$\omega_2 = 50\pi = 2\pi f_2 \Rightarrow f_2 = 25\ \text{Hz}$$

$$\omega_3 = 100\pi = 2\pi f_3 \Rightarrow f_3 = 50\ \text{Hz}$$

b) Écrire chacun des signaux précédents sous forme de phaseur de crête complexe et de phaseur efficace complexe.

$$\begin{cases} \widehat{\underline{U_1}} = 1.2e^{j0} \text{ V} \\ \widehat{\underline{I_1}} = 0.3e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ A} \end{cases} , \begin{cases} \underline{U_1} = \frac{1.2}{\sqrt{2}} e^{j0} = 0.849e^{j0} \text{ V} \\ \underline{I_1} = \frac{0.3}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} = 0.212e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ A} \end{cases}$$

Pour le dipôle 2, on écrit la tension et le courant tous les 2 soit en cosinus, soit en sinus :

$i_2(t) = 5\cos\left(50\pi t - \left(\frac{\pi}{2} + 0.6\right)\right)$

$$\begin{cases} \widehat{\underline{U_2}} = 23e^{j1.4} \text{ V} \\ \widehat{\underline{I_2}} = 5e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+0.6\right)} \text{ A} \end{cases} , \begin{cases} \underline{U_2} = \frac{23}{\sqrt{2}} e^{j1.4} = 16.263e^{j1.4} \text{ V} \\ \underline{I_2} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+0.6\right)} = 3.536e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+0.6\right)} \text{ A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{\underline{U_3}} = 310e^{j2.5} \text{ V} \\ \widehat{\underline{I_3}} = 14.15e^{j2.5} \text{ A} \end{cases} , \begin{cases} \underline{U_3} = \frac{310}{\sqrt{2}} e^{j2.5} = 219.203e^{j2.5} \text{ V} \\ \underline{I_3} = \frac{15.15}{\sqrt{2}} e^{j2.5} = 10.006e^{j2.5} \text{ A} \end{cases}$$

c) Pour chacun des dipôles, calculer le déphasage φ (en radian) de la tension par rapport au courant.

Pour le dipôle 1 : $\varphi = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ rad

Pour le dipôle 2 : $\varphi = 1.4 + \left(\frac{\pi}{2} + 0.6\right) = 3.57$ rad

Pour le dipôle 2 : $\varphi = 0$ rad

d) Calculer sous forme exponentielle complexe $\underline{U}/\underline{I}$ de chacun des dipôles. Cette quantité est appelé impédance complexe, notée $\underline{Z}$.

$$\underline{Z_1} = \frac{\underline{U_1}}{\underline{I_1}} = \frac{0.849}{0.212} e^{-j\frac{\pi}{4}} = 4.005e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\underline{Z_2} = \frac{\underline{U_2}}{\underline{I_2}} = \frac{16.263}{3.536} e^{j\left(0.8-\frac{\pi}{2}\right)} = 4.599e^{j\left(0.8-\frac{\pi}{2}\right)}$$

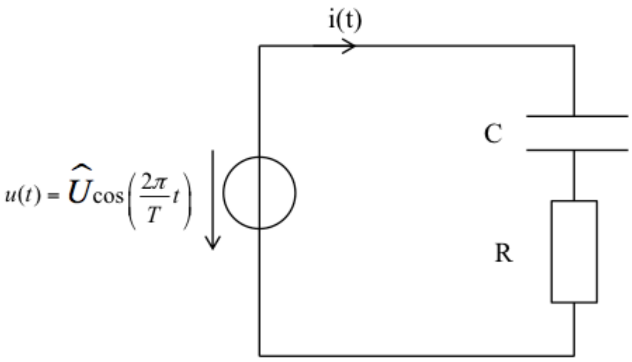
$$\underline{Z_3} = \frac{\underline{U_3}}{\underline{I_3}} = \frac{219.203}{10.006} e^{j0} = 21.907$$

Exercice 3 :

Dans le circuit RC suivant, calculer l'amplitude $\widehat{I}$ du courant et le déphasage θ du courant par rapport à la tension en fonction de $\widehat{U}, R, C, T$.

Pour cela utilisez le calcul complexe associé étant donné $u(t) \longrightarrow \underline{u} = \widehat{U}e^{j(\omega t)}$ et en cherchant $i(t) \longrightarrow \underline{i} = \hat{I}e^{j(\omega t+\beta)}$.

Aide : utilisez la loi des mailles et prenez la dérivée pour faire apparaitre une équation avec seulement u(t) et i(t).



Loi des mailles :

$$u_c(t) + u_R(t) = u(t)$$

$$u_c(t) + Ri(t) = u(t)$$

$$\frac{du_c(t)}{dt} + R\frac{di(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\frac{1}{C}i(t) + R\frac{di(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}$$

Nous passons au calcul complexe associé, avec $\underline{u}$ et $\underline{i}$:

$$\frac{1}{C}\underline{i} + R\frac{d\underline{i}}{dt} = \frac{d\underline{u}}{dt}$$

$$\frac{1}{C}\hat{I}e^{j(\omega t+\beta)} + R\frac{d\hat{I}e^{j(\omega t+\beta)}}{dt} = \frac{d\widehat{U}e^{j(\omega t)}}{dt}$$

$$\frac{1}{C}\hat{I}e^{j(\omega t+\beta)} + Rj\omega\hat{I}e^{j(\omega t+\beta)} = j\omega\widehat{U}e^{j(\omega t)}$$

$$\frac{1}{C}\underline{i}+Rj\omega\underline{i}=j\omega\underline{u}$$

$$\underline{u}=\left(\frac{1}{j\omega C}+R\right)\underline{i}$$

Nous avons donc :

$$\widehat{U}e^{j(\omega t)}=\left(R-j\frac{1}{\omega C}\right)\hat{I}e^{j(\omega t+\beta)}$$

$$\widehat{U}e^{j(\omega t)}=\underline{Z}\hat{I}e^{j(\omega t+\beta)}$$

Avec $\underline{Z}=\left(R-j\frac{1}{\omega C}\right)=\left|\underline{Z}\right|e^{j\theta}$, avec $\left|\underline{Z}\right|=\sqrt{R^2+\frac{1}{(\omega C)^2}}$ et $-\theta=\arg\left(\underline{Z}\right)=\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\omega RC}\right)$

Nous pouvons donc exprimer l'amplitude du courant tel que :

$$\hat{I}=\frac{\widehat{U}}{\left|\underline{Z}\right|}=\frac{\widehat{U}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{(\omega C)^2}}}$$

Le déphasage du courant par rapport à la tension est :

$$\theta=\beta-0=-\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\omega RC}\right)$$

<u>Exercice 4</u> :

Sachant que Z_1= 3+j2 ; Z_2=1-j2 ; Z_3=-2+j, on a :

a) $Z_1+Z_2-Z_3=6-j$

b) $\frac{Z_1Z_2}{Z_3}=-\frac{18}{5}+j\frac{1}{5}$

c) $Z_1+\frac{Z_2}{Z_3}=\frac{11}{5}+j\frac{13}{5}$

<u>Exercice 5</u> :

Sachant que Z_1= 3e$^{j\,\pi/2}$; Z_2=1e$^{-j3\pi/4}$; Z_3=-2e$^{j\,3\pi/2}$:

a) $Z_1Z_2Z_3=-6\cdot e^{j\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

b) $\frac{Z_1Z_2}{Z_3}=-\frac{3}{2}\cdot e^{-j\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$

Exercice 6 :

(a) On sait que $\underline{U}_1 = \underline{U}_4$ par la loi des mailles. Donc le déphasage entre $\underline{U}_1$ et $\underline{I}_2$ est égal au déphasage entre $\underline{U}_4$ et $\underline{I}_2$, qui est lui-même égal à l'argument de $\underline{Z}_4$ par définition de l'impédance. Or $\arg(\underline{Z}_4) = -\frac{\pi}{2}\ rad$. Donc le déphasage entre $\underline{I}_2$ et $\underline{U}_1$, qui est l'opposé du déphasage entre $\underline{U}_1$ et $\underline{I}_2$, vaut $\frac{\pi}{2}\ rad$.

(b) Par le diviseur de tension dans la maille de gauche, on sait que

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

Donc le déphasage entre $\underline{U}_3$ et $\underline{U}_1$ vaut arg $\left(\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}\right)$, soit :

$$\arg\left(\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}\right) = \arg\frac{200j}{3000 + 200j} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{200}{3000}\right) = 1.504\ rad$$

Exercice 7 :

(a) On calcul d'abord l'impédance totale de la charge sur la source. Soit $\underline{Z}_4$ en parallèle avec $\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$.

$$\underline{Z}_{tot} = 1 \Big/ \left(\frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4}\right) = \frac{\underline{Z}_4(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{tot} = \frac{-25j \cdot (3000 + 200j)}{3000 + 175j} = \frac{5000 - 7.5 \cdot 10^4 j}{3000 + 175j}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{tot} = \frac{(5000 - 7.5 \cdot 10^4 j)(3000 - 175j)}{9 \cdot 10^6 + 30625}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{tot} = \frac{1.875 \cdot 10^6 - 2.2588 \cdot 10^8 j}{9.030625 \cdot 10^6} \approx 0.2076 - 25.01j$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{tot} = 25.01 e^{-1.563j}$$

Puis :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{tot}} = 0.08 e^{j(6.28 \cdot 10^5 t + 1.563)}$$

(b) $\underline{Z}_2$ est purement réel, c'est donc une résistance. $\underline{Z}_3$ est imaginaire pure de partie imaginaire positive, c'est donc une inductance (de type $\underline{Z} = j\,\omega L$). $\underline{Z}_4$ est imaginaire pure de partie imaginaire négative, c'est une capacité (de type $\underline{Z} = -\frac{j}{\omega C}$).

(c) La résistance ne varie pas avec la fréquence donc $\underline{Z}_2 = R = 3000\ \Omega$.

Pour retrouver les valeurs de capacité et d'inductance correspondant à $\underline{Z}_3$ et $\underline{Z}_4$, on a besoin de la pulsation ω de la source d'excitation du circuit, soit $6.28 \cdot 10^5\ rad/s$.

D'après (b) $\underline{Z}_3 = j\omega L$ donc $L = \frac{\underline{Z}_3}{j\omega} = \frac{200}{6.28\cdot 10^5} = 0.32\ mH$.

Et $\underline{Z}_4 = -\frac{j}{\omega C}$ donc $C = -\frac{j}{\omega \underline{Z}_4} = \frac{1}{25 * 6.28\cdot 10^5} = 63.7\ nF$.